数理解析研究所講究録 1267 巻 2002 年 26-47

On flower-tree dessins and their Belyi functions

東京都立大学　小松 亨 [1](Toru KOMATSU)
Tokyo Metropolitan University

1. Introduction

本稿では、ある型の dessin を与える Belyi 関数の構成法について述べる。研究集会における講演では、主結果と幾つかの実例等だけを話したが、以下では主結果の証明の概要などについても詳しく述べる。

第 1 章では言葉の定義をしながら知られている事実や結果等を挙げていき、主結果の詳細については 2 章以降で述べる事にする。Belyi 関数とは、$\mathbb{P}^1$ の有限次被覆 (有理形関数) で 3 点 $0, 1, \infty$ ($\in \mathbb{P}^1$) の外不分岐なものである。Belyi 関数 $\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ に対して、$0, 1 \in \mathbb{P}^1$ を結ぶ (∞ を通らない) 実線分 $[0, 1]$ の逆像 $\beta^{-1}([0, 1])$ は、$\mathbb{P}^1$ 上の連結なグラフになる。このグラフを Grothendieck の dessin d'enfant (または単に dessin) と呼ぶ。また、$0, 1$ の逆像 $\beta^{-1}(0), \beta^{-1}(1)$ を区別して 2 種類の印 (例えば $\bullet, \times$) をつけるとグラフは 2 部グラフになる。つまり、Belyi 関数 β から得らえる dessin $\beta^{-1}([0, 1])$ は、連結な 2 部グラフである。逆に、辺の個数が有限である任意の連結な 2 部グラフは、ある Belyi 関数 β の dessin として "実現できる" 事が A. Grothendieck [Gr] によって知られている。ここでいう "実現できる" とは、$\mathbb{P}^1$ 上のグラフとして同値なものが得られる事を意味する。今回の主結果は、Figure 2.1 (cf. 2 章) のようなグラフに関する事であり、特にそれを実現する Belyi 関数の具体的構成法の発見である。dessin における言葉の定義は、グラフ理論 (cf. [Di]) で使われているものによる事が多い。2 部グラフには、Figure 1.1a のように cycle があるものと、Figure 1.1b のように cycle がないものが存在する。一般に cycle がないグラフを tree と呼ぶが、dessin においても同様に tree と呼ぶことにする。辺の個数が有限であるグラフには直径 (diameter) が定義されるが、それと同様にして dessin の直径を定義する。例えば、Figure 1.1a, 1.1b のグラフの直径はそれぞれ 6, 7 である。

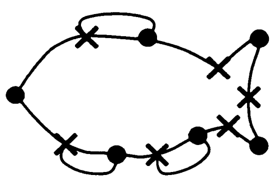

Figure 1.1a

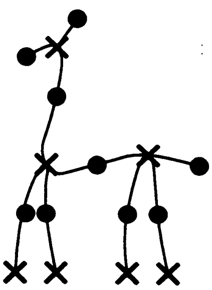

Figure 1.1b

[1]Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa Hachioji-shi Tokyo, 192-0397 Japan　E-mail: trkomatu@comp.metro-u.ac.jp

本研究の主役は 直径 4 の tree であり、その形 (Figure 1.2) から flower-tree と呼ぶことにする。

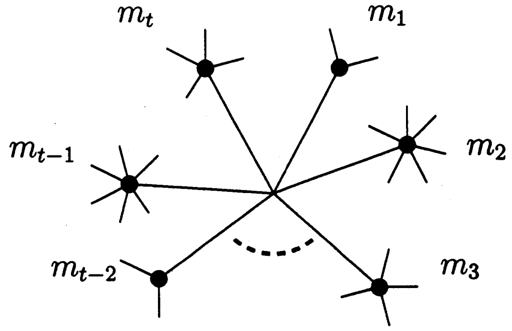

Figure 1.2

flower-tree (直径 4 の tree グラフ) には中心とされる点が 1 つあり、その中心点に隣接する点 (辺を 1 つ挟んだ頂点) 達を Q_i とする。このとき、点 Q_i 達から辺が何本出ているか (あるいは入っているか) でそのグラフの呼び方を定義する。
Definition (Type of flower-tree). We call the graph in the Figure 1.2 *a flower-tree of type* $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$. Here $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$ is a multi-set.
Remark. Both graphs of Figure 1.3 are called flower-trees of type $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ due to the definition. One calls their trees Leila's flowers [Sc1].

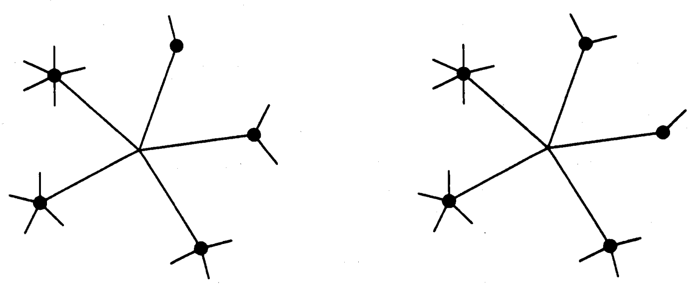

Figure 1.3

flower-tree に関する研究は、[AdSh],[JoSt],[Sc1],[Sh1],[ShZv],[Za1],[Za2],[Za3] 等でなされている。特に flower-tree の Belyi 関数を求める計算は、[Sc1] では $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 型について、[ShZv] では $\{m, n, k\}$ 型、$\{m, m, n, n, n\}$ 型、$\{m, m, n, n, n, n, n\}$ 型、$\{m, m, n, k\}$ 型、$\{m, m, m, n, k\}$ 型など (m, n, k は相異なる正の整数) について研究されている。$\mathbb{C}$ 上ではなく、有限体上や完備体上での flower-tree を与える Belyi 関数についての研究もなされている (cf. [Za2],[Za3])。今回の研究動機の 1 つは G. Shabat–A. Zvonkin の共著論文 [ShZv] であり、実際、本研究の成果として [ShZv] の結果のある一般化を得ている。また、もう 1 つの大きな動機として以下のような事実と予想がある。$\mathcal{D}_g$ を genus g の dessin 全体から成る集合とする (定義は [Sc1] 等参照)。有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群を $G_{\mathbb{Q}}$ として、$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の $(X, \beta) \in \mathcal{D}_g$ への作用を $(X, \beta)^\sigma = (X^\sigma, \beta^\sigma)$ とする (X, β は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されている)。このとき
Proposition 1.1. *The action of* $G_{\mathbb{Q}}$ *on* $\mathcal{D}_g$ *is faithful for each* $g \in \mathbb{Z}, g \geq 0$.
$g = 0$ は 以下の Proposition 1.2 の系であり、$g \geq 1$ の場合については M. Miyashita [Mi] の結果である。tree(形の dessin) 全体から成る集合を $\mathcal{T}(\subsetneq \mathcal{D}_0)$ とする。このとき

Proposition 1.2 (H. W. Lenstra Jr.–L. Schneps [Sc1]). *The action of $G_{\mathbb{Q}}$ on $\mathcal{T}$ is faithful.*
flower-tree全体から成る集合を$\mathcal{FT}(\subsetneq \mathcal{T})$とする。このとき次のような予想がある。
Conjecture 1.3 (flower-tree conjecture (花実予想), K–L. Zapponi). *The absolute Galois group $G_{\mathbb{Q}}$ acts faithfully on $\mathcal{FT}$.*
この Conjecture 1.3 からも分かるように flower-tree 及びその Belyi 関数は大変興味深い研究対象である。

2. Main results

今回構成する Belyi 関数の flower-tree は $\{m, m, n, \ldots, n\}$ 型 (m は2個、n は l 個) であり、下図のようなグラフである。

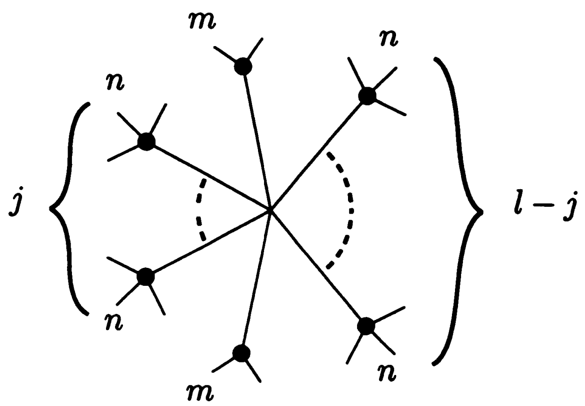

Figure 2.1

Definition (j-th flower-tree of type $\{m, m, n, \ldots, n\}$). The center of a flower-tree of type $\{m, m, n, \ldots, n\}$ has $(l+2)$ edges. On the $(l+2)$ vertices adjacent to the center, two of them have m edges and the others have n edges, respectively. We call the graph in the Figure 2.1 *j-th flower-tree of type* $\{m, m, n, \ldots, n\}$ if there exists j adjacent vertices having n edges between two adjacent vertices having m edges.
Theorem A. *There exists a set of polynomials $\{c_k(r, S) \in \mathbb{Q}[r, S] \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$ with a following property. Let l, m and n be positive integers with $m \neq n$. For each solution s of the equation $c_{l+1}(m/n, S) = 0$,*

$$\beta_l(m, n; s)(X) = (sX^2 + X + 1)^m \Big(\sum_{k=0}^{l} c_k(m/n, s) X^k\Big)^n$$

is a Belyi function whose dessin is a flower-tree of type $\{m, m, n, \ldots, n\}$. Here the numbers of m and n in $\{m, m, n, \ldots, n\}$ are equal to 2 and l, respectively. Conversely, every flower-tree of such type can be constructed in this way, except for $(l/2)$-th with even l. The $(l/2)$-th one is obtained by $\beta_{l/2}(m, n; 0)(X^2)$.

Theorem A は、$\{m, m, n, \ldots, n\}$ 型 flower-tree の構成法を明示している。また $\{c_k(r, S)\}_{k=0}^{\infty}$ も具体的に記述できる。
Theorem B. *The generating function of the polynomials $c_k(r, S)$ is*

$$\frac{1}{(SX^2 + X + 1)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r, S) X^k.$$

In particular,

$$c_k(r,S) = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-2i)!i!} \Big(\prod_{j=0}^{k-i-1} (r+j) \Big) S^i.$$

ここで、$[x]$ は実数 x の整数部分 (integer part) とする。$c_{l+1}(r,S)=0$ の解については、次の性質が分かる。

Proposition 2.1. *With notations as above, all of the solutions of* $c_{l+1}(m/n,S)=0$ *are real numbers, and they are distinct.*

そして Theorem A を精密にするものとして次が得られた。

Theorem C. *Let* $s_0 < s_1 < \cdots < s_{[(l+1)/2]-1}$ *be the solutions of* $c_{l+1}(m/n,S)=0$. *Then the dessin of* $\beta_l(m,n;s_j)(X)$ *is the* j*-th flower-tree of type* $\{m,m,n,\ldots,n\}$.

この Theorem C は講演の時点では予想であったが、研究集会後の中村博昭先生の助言により証明できた結果である。

以下 3 章では Theorems A, B, Proposition 2.1, Theorem C の証明の概要を述べ 4 章では主結果に関する幾つかの注意を述べる。また、5 章では Belyi 関数の具体例を幾つかあげる。

Acknowledgement. The author is most grateful to Professor Dr. Hiroaki Nakamura not only for giving opportunity to talk at the symposium which he organized, but also for many advice on this report.

Contents

3. Sketch of proof of main results

§ 3.1 Elementary property of $c_k(r,S)$
本節では 関数 $c_k(r,S)$ の性質について考察する。関数 $c_k(r,S)\in\mathbb{Q}[r,S]$ の定義は

$$c_k(r,S)=\sum_{i=0}^{[k/2]}\frac{(-1)^{k-i}}{(k-2i)!i!}\Big(\prod_{j=0}^{k-i-1}(r+j)\Big)S^i \qquad (k\in\mathbb{Z},k\geq 0)$$

とする。このとき

Proposition 3.1. *We have*

$$\frac{1}{(SX^2+X+1)^r}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(r,S)X^k.$$

In particular,

$$(SX^2+X+1)^m\Big(\sum_{k=0}^{\infty}c_k(m/n,S)X^k\Big)^n=1$$

for $m,n\in\mathbb{Z}$ *with* $m,n>0$.

関数列 $\{c_k(r,S)\}_{k=0}^{\infty}$ は次の漸化式を満たす (証明略)。

Lemma 3.2. *For each* $k\in\mathbb{Z}$ *with* $k\geq 1$, *we have*

$$(2r+k-1)Sc_{k-1}(r,S)+(r+k)c_k(r,S)+(k+1)c_{k+1}(r,S)=0. \qquad \square$$

Proof of Proposition 3.1. まず、$Y=1/(SX^2+X+1)^r$ が微分方程式

$$(SX^2+X+1)\frac{\partial Y}{\partial X}+r(2SX+1)Y=0 \tag{3.1}$$

の解であることは容易に分かる。一方 Lemma 3.2 から、$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(r,S)X^k$ も解である。(3.1) が X に関しての一階偏微分方程式であるので、$1/(SX^2+X+1)^r$ と $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(r,S)X^k$ は定数倍を除いて等しい。ここで言う定数とは X についての事であり、r,S に関しては一般に定数とは限らない。$X=0$ の時のそれぞれの値が 1 であるので、$1/(SX^2+X+1)^r=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(r,S)X^k$. $\square$

Proposition 3.1 は、$1/(SX^2+X+1)^r$ を $(SX^2+X+1)^{-r}$ とし、$SX^2,X,1$ の 3 項展開として形式的にも証明できる。Lemma 3.2 を導入した理由は、次の lemma にも有益な為である。

Lemma 3.3. *Let* $k\in\mathbb{Z}$ *be a non-negative integer and* $r_1\in\mathbb{R}$ *a positive real number. Then*

(i) $c_k(r_1,0)\neq 0$,

(ii) $c_k(r_1,s)\neq 0$ *for any* $s\in\mathbb{C}$ *satisfying* $c_{k+1}(r_1,s)=0$.

Proof. (i) は、定義から $c_k(r_1,0)=(-1)^k\big(\prod_{j=0}^{k-1}(r_1+j)\big)/k!\neq 0$. (ii) について $c_k(r_1,s)=c_{k+1}(r_1,s)=0$ となる $s\in\mathbb{C}$ が存在すると仮定する。ここで、$c_0(r,S)=1\neq 0$ より $k\geq 1$ である。このとき Lemma 3.2 から $(2r_1+k-1)sc_{k-1}(r_1,s)=0$. (i) から $s\neq 0$、仮定から $2r_1+k-1>0$ であるので $c_{k-1}(r_1,s)=0$. 以下同様にして $c_0(r_1,s)=0$ を得るが、これは $c_0(r,S)=1$ に矛盾。従って $c_{k+1}(r_1,s)=0$ となる $s\in\mathbb{C}$ に対しては、$c_k(r_1,s)\neq 0$. $\square$

§ 3.2 Ramification of the covering $\beta_l(m,n;s)$
本節では 関数 $\beta_l(m,n;s)$ が Belyi 関数である事を証明する。

Proposition 3.4. *Let l, m and n be positive integers. Let s be a solution of $c_{l+1}(m/n, S) = 0$. Then $\beta_l(m, n; s)$ is a Belyi function.*

定義に従い、関数

$$\beta_l(m,n;s)(X) = (sX^2+X+1)^m\Big(\sum_{k=0}^{l} c_k(m/n,s)X^k\Big)^n$$

が 3 点 $0, 1, \infty$ 以外では不分岐であることを確かめる。以下 この節では l, m, n, s を固定し、$\beta(X) = \beta_l(m,n;s)(X)$ とする。まず、点 $0, 1, \infty$ での分岐状況を見る。それぞれの点 $P = 0, 1, \infty$ に対して $A_P = \{x \in \mathbb{P}^1 \mid \beta(x) = P\}$, $N_P = \sharp A_P$ とおき、$A = A_0 \amalg A_1 \amalg A_\infty$ とする。被覆 $\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ における点 x での分岐指数を $e(x)$ と書く。このとき

$$\sum_{x\in A}(e(x)-1) = 3\deg\beta - N_0 - N_1 - N_\infty. \tag{3.2}$$

次数 $\deg\beta$ について、Lemma 3.3 から $s \neq 0, c_l(m/n,s) \neq 0$ であり

$$\deg\beta = 2m + ln. \tag{3.3}$$

N_0 について、$s \neq 0, c_l(m/n,s) \neq 0$ より

$$N_0 \leq l+2. \tag{3.4}$$

式 (3.4) の等号成立は

$$\text{仮定 1: } (sX^2+X+1)\Big(\sum_{k=0}^{l} c_k(m/n,s)X^k\Big) = 0 \text{ は重解を持たない}$$

と同値である。N_1 について、$c_{l+1}(m/n,s) = 0$ 及び Proposition 3.1 から

$$\begin{aligned}\beta(X) &= (sX^2+X+1)^m\Big(\sum_{k=0}^{l+1} c_k(m/n,s)X^k\Big)^n \\ &\equiv (sX^2+X+1)^m\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(m/n,s)X^k\Big)^n \pmod{X^{l+2}\mathbb{Q}(s)[[X]]} \\ &= 1.\end{aligned}$$

従って $e(0) \geq l+2$ であり

$$N_1 \leq \deg\beta - (l+1) = 2m + ln - l - 1. \tag{3.5}$$

式 (3.5) の等号成立は

$$\text{仮定 2: } (\beta(X)-1)/X^{l+1} = 0 \text{ は重解を持たない}$$

と同値である。N_∞ は、$\beta(X)$ が多項式であるので $A_\infty = \{\infty\}$,

$$N_\infty = 1. \tag{3.6}$$

一方、点 $0, 1, \infty$ 以外の所について (定義から明らかに)

$$\sum_{x\in\mathbb{P}^1\setminus A}(e(x)-1) \geq 0 \tag{3.7}$$

であり、(3.7) の等号成立は

仮定 3: $\beta(X)$ は Belyi 関数である

と同値である。被覆における分岐指数に関しては以下の Riemann-Hurwitz の公式がよく知られている。

Lemma 3.5 (Riemann-Hurwitz formula (cf. [Si1])). *Let $\phi : C_1 \to C_2$ be a non-constant separable map of smooth curves over a field K. Then*

$$2g_1 - 2 \geq (\deg\phi)(2g_2 - 2) + \sum_{P \in C_1} (e_\phi(P) - 1),$$

where g_i is the genus of C_i. Further, equality holds if and only if either:
(i) $\mathrm{char}(K) = 0$; *or*
(ii) $\mathrm{char}(K) = p > 0$ *and p does not divide $e_\phi(P)$ for all $P \in C_1$.*

Proof of Proposition 3.4. Lemma 3.5 ($g_1 = g_2 = 0$) から

$$2\deg\beta - 2 \geq \sum_{x \in \mathbb{P}^1} (e(x) - 1).$$

一方、(3.2) から (3.7) までより

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \mathbb{P}^1} (e(x) - 1) &\geq 3(2m + ln) - (l + 2) - (2m + ln - l - 1) - 1 \\ &= 2(2m + ln) - 2 \\ &= 2\deg\beta - 2.\end{aligned}$$

従って、この不等号は実際は等号であり 式 (3.4),(3.5),(3.7) は全て等号成立する。特に $\beta(X)$ は Belyi 関数である。 □

§ 3.3 Discriminant of the equation $c_k(r, S) = 0$

本節では 次節で行う Proposition 2.1 の証明の為の準備をする。特に、方程式 $c_k(r, S) = 0$ の判別式を具体的に記述する。$k < 4$ のとき $c_k(r, S) = 0$ の解は簡単に分かるので、以下では $k \geq 4$ とする。方程式 $c_k(r, S)$ の S に関する最高次の係数を $h_k(r)$ とし、$c_k(r, S) = 0$ の解達を $s_i (i = 1, \ldots, [k/2])$ とする、つまり

$$c_k(r, S) = h_k(r) \prod_{1 \leq i \leq [k/2]} (S - s_i).$$

ここで、s_i 達は k と r の両方に依存している事 ($s_i = s_i(k, r)$) に注意する。このとき、判別式 $d_k(r)$ を

$$d_k(r) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq [k/2]} (s_{i_1} - s_{i_2})^2$$

と定義する。一方、多項式 $\mathfrak{D}_k(r) \in \mathbb{Q}[r]$ を

$$\mathfrak{D}_k(r) = \prod_{j=1}^{[k/2]-1} (r + k - j - 1)^j \prod_{j=1}^{[k/2]-1} (r + j + 1/2)^j$$

とする。このとき

Proposition 3.6. *We have*

$$d_k(r) = C_k \mathfrak{D}_k(r),$$

where $C_k = d_k(1)/\mathfrak{D}_k(1) \in \mathbb{Q}^\times$ *and*

$$d_k(1) = \begin{cases} (k+1)^{k/2-1} & \textit{if } k \textit{ is even,} \\ 2^{k-1}/(k+1)^{(k-1)/2} & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

まず $c_k(r,S)/h_k(r)$ は S に関して $[k/2]$ 次の monic な多項式であり、$\mathbb{Q}[r]$ 係数であるので $d_k(r) \in \mathbb{Q}[r]$. 環 $\mathbb{Q}[r]$ は Dedekind domain である。係数を Dedekind domain に持つ monic 多項式についての一般的な事実 (cf. § 6.1) から次が分かる。

Lemma 3.7. *For each* $j \in \mathbb{Z}$ *with* $1 \le j \le [k/2]-1$, *we have* $(r+k-j-1)^j \mid d_k(r)$ *in* $\mathbb{Q}[r]$.

Proof. 定義から

$$c_k(r,S)/h_k(r) = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^{[k/2]-i}[k/2]!}{(k-2i)!i!}\Big(\prod_{j=k-[k/2]}^{k-i-1}(r+j)\Big)S^i.$$

$1 \le j_1 \le [k/2]-1$ である整数 $j_1 \in \mathbb{Z}$ に対して、多項式 $r+k-j_1-1 \in \mathbb{Q}[r]$ は $c_k(r,S)/h_k(r)$ の $S^i (i=0,1,\dots,j_1)$ の係数達を全て割り切る。従って、Lemma 6.1 から $(r+k-j_1-1)^{j_1} \mid d_k(r)$. □

$\mathfrak{D}_k(r)$ のもう一方の因子達についても同様な方法で導く。その為に、$c_k(r,S)$ に類似した次のような多項式 $c_k^0(r,S)$ を考える。0 以上の整数 $k \in \mathbb{Z}(k \ge 0)$ に対して

$$c_k^0(r,S) = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-2i)!i!}\Big(\prod_{j=0}^{k-[k/2]-1}(r+j)\Big)\Big(\prod_{j=i}^{[k/2]-1}(r+j+1/2)\Big)S^i$$

と定義する。このとき

Lemma 3.8. *We have*

$$c_k(r, S+1/4) = c_k^0(r,S).$$

Proof. 定義から $c_0(r,S+1/4) = c_0^0(r,S) = 1$, $c_1(r,S+1/4) = c_1^0(r,S) = -r$ である。また、1 以上の全ての整数 $k \in \mathbb{Z}(k \ge 1)$ に対して

$$(2r+k-1)(S+1/4)c_{k-1}^0(r,S) + (r+k)c_k^0(r,S) + (k+1)c_{k+1}^0(r,S) = 0$$

が成立する (計算略)。従って Lemma 3.2 と数学的帰納法から $c_k(r,S+1/4) = c_k^0(r,S)$ となる。□

$c_k(r,S)$ の判別式と $c_k^0(r,S)$ の判別式が等しいという事に注意すると、Lemma 3.7 の証明と同様の議論で Lemma 3.8 から次が導かれる。

Lemma 3.9. *For each* $j \in \mathbb{Z}$ *with* $1 \le j \le [k/2]-1$, *we have* $(r+j+1/2)^j \mid d_k(r)$ *in* $\mathbb{Q}[r]$. □

多項式 $d_k(r), \mathfrak{D}_k(r)$ の次数比較をする為に次の lemma を用意する。

Lemma 3.10. $\deg_r d_k(r) \le [k/2]([k/2]-1)$.

Proof. $c_k^1(r,S) = c_k(r,rS)/r^{[k/2]}$ とすると

$$c_k^1(r,S) = h_k(r)\sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^{[k/2]-i}[k/2]!}{(k-2i)!i!}\Big(\prod_{j=k-[k/2]}^{k-i-1}(1+\frac{j}{r})\Big)S^i.$$

方程式 $c_k^1(r,S)$ の S に関する判別式 $d_k^1(r)$ は

$$d_k^1(r) = \prod_{1\le i_1<i_2\le[k/2]}(s_{i_1}/r - s_{i_2}/r)^2 = d_k(r)/r^{[k/2]([k/2]-1)}$$

である。$c_k^1(r,S)/h_k(r)$ は S に関して monic な $\mathbb{Q}[1/r]$ 係数多項式であるので、$d_k^1(r) \in \mathbb{Q}[1/r]$. よって $\deg_r d_k(r) \le [k/2]([k/2]-1)$. □

Proof of Proposition 3.6. Lemmas 3.7, 3.9 から、$\mathbb{Q}[r]$ の元として $\mathfrak{D}_k(r) \mid d_k(r)$, さらに Lemma 3.10 も合せると $\deg_r \mathfrak{D}_k(r) \le \deg_r d_k(r) \le [k/2]([k/2]-1)$ となる。一方、定義より $\deg_r \mathfrak{D}_k(r) = [k/2]([k/2]-1)$ であるので $\deg_r \mathfrak{D}_k(r) = \deg_r d_k(r) = [k/2]([k/2]-1)$. 従って、ある有理数 $C_k \in \mathbb{Q}^\times$ が存在して $d_k(r) = C_k \mathfrak{D}_k(r)$. 以下の lemma から $d_k(1) \neq 0$ であり、また $\mathfrak{D}_k(1) \neq 0$ であるので $C_k = d_k(1)/\mathfrak{D}_k(1) \in \mathbb{Q}^\times$. □

Proposition 3.6 の証明で、値 $d_k(1)$ の計算が残っている。

Lemma 3.11.

$$c_k(1,S) = h_k(1)\prod_{j=1}^{[k/2]}\left(S - \frac{1}{4\cos^2(\pi j/(k+1))}\right),$$

$$d_k(1) = \begin{cases} (k+1)^{k/2-1} & \textit{if } k \textit{ is even,} \\ 2^{k-1}/(k+1)^{(k-1)/2} & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. 多項式 $c_k(1,S)$ の因数分解は、第 2 種 Chebyshev 関数の母関数から分かる (cf. §6.2)。$d_k(1)$ は、解 $1/(4\cos^2(\pi j/(k+1)))$ 達から計算する。□

§ 3.4 Solutions of the equation $c_k(r,S)=0$

本節では Proposition 2.1 を証明するが、次の proposition から 直ちに導かれる。

Proposition 3.12. *Let k be a positive integer greater than* 1, *and r a positive real number. Then $c_k(r,S)=0$ has distinct real solutions greater than* 1/4.

Proposition 3.6 から 判別式 $d_k(r)$ が正確に分かり、特に $r>0$ ならば $d_k(r)\neq 0$ である。 つまり $c_k(r,s)=0$ となる $r>0$, $s\in\mathbb{C}$ に対して、$\partial c_k(r,s)/\partial S \neq 0$. このとき陰関数定理 (cf. [Bl] Chap. II) などから次が分かる。

Lemma 3.13. *There exists a unique set $\{s_j(r)\}_{j=1}^{[k/2]}$ of analytic functions such that $\{s_j(r_1)\}_{j=1}^{[k/2]}$ is the set of all solutions of $c_k(r_1,S)=0$ for every positive real number $r_1>0$. In particular, $s_{j_1}(r_1)\neq s_{j_2}(r_1)$ for any $r_1>0$ and $j_1\neq j_2$.* □

ここで、$s_j(r)$ の添数 j を $s_j(1) = 1/(4\cos^2(\pi j/(k+1)))$ となるようにおく。このとき

Lemma 3.14. *For each $r>0$, the solutions $s_j(r) (j=1,\dots,[k/2])$ of $c_k(r,S)=0$ are all real, and $s_1(r)<s_2(r)<\cdots<s_{[k/2]}(r)$.*

Proof. $s_{j_1}(r_1)\notin\mathbb{R}$ となる $1\le j_1\le[k/2]$, $r_1>0$ が存在すると仮定する。Lemma 3.11 から $r_1\neq 1$. 数列 $U=\{u_i\}$, $V=\{v_i\}$ を初項 $u_1=1, v_1=r_1$、漸化式 $(i\in\mathbb{Z}, i\ge 1)$

$$(u_{i+1},v_{i+1}) = \begin{cases} ((u_i+v_i)/2, v_i) & \text{if } s_{j_1}((u_i+v_i)/2)\in\mathbb{R}, \\ (u_i,(u_i+v_i)/2) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

で定義する。このとき $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ は有界な単調数列 (単調増加列または単調減少列) であるので、極限値 $u=\lim_{i\to\infty}u_i$, $v=\lim_{i\to\infty}v_i$ が存在する。また、$(u_i-v_i) = (1-r_1)/2^{i-1}$ より $u=v$. いま、$\{v_i\}$ の定義から $s_{j_1}(v_i)\notin\mathbb{R} (v_i\in V)$ である。$c_k(v_i,S)\in\mathbb{Q}[v_i][S]\subset\mathbb{R}[S]$ である事から、$s_j(v_i)=\overline{s_{j_1}(v_i)}$ となる j が存在する。なお、$\bar{z}$ は 複素数 z の複素共役とする。ここで j は v_i に依存する。しかしながら 無数の $v_i\in V$ に対して j の取り方は 高々有限である。従って、ある整数 j_2 とある位数無限の部分集合 $V_0\subset V(\sharp V_0=\infty)$ が存在して 全ての $v_i\in V_0$ に対して $s_{j_2}(v_i)=\overline{s_{j_1}(v_i)}$.

解析関数 $s_j(r)$ は r に関して連続関数であるので

$$s_{j_2}(u) = s_{j_2}(v) = \lim s_{j_2}(v_i) = \lim \overline{s_{j_1}(v_i)} = \overline{s_{j_1}(v)} = \overline{s_{j_1}(u)}.$$

ここで上式の lim は $\lim_{i\in V_0, i\to\infty}$ とする。一方、$\{u_i\}$ の定義から $s_{j_1}(u) \in \mathbb{R}$ である。従って $s_{j_1}(u) = s_{j_2}(u)$ となり Lemma 3.13 に矛盾。よって、全ての $1 \le j \le [k/2]$ と全ての $r > 0$ に対して $s_j(r) \in \mathbb{R}$.

次に $s_j(r)(1 \le j \le [k/2])$ の大小関係について考える。定義から $s_1(1) < s_2(1) < \cdots < s_{[k/2]}(1)$. ここで、$s_{j_1}(r_1) \ge s_{j_2}(r_1)$ となる $j_1 < j_2$ と r_1 が存在すると仮定する。$s_j(r) \in \mathbb{R}\,(r > 0)$ であるので中間値の定理より、1 と r_1 の間に ある数 $r_2 \in \mathbb{R}$ が存在して $s_{j_1}(r_2) = s_{j_2}(r_2)$ となる。これは Lemma 3.13 に矛盾。従って、$s_j(r)(1 \le j \le [k/2])$ の大小関係は $r = 1$ の時のものが保存される。 □

Lemma 3.15. *For each $r > 0$, any solutions of $c_k(r, S) = 0$ are greater than $1/4$.*

Proof. Lemma 3.8 から $c_k^0(r, S) = 0$ の解が全て正 (の実数) である事を示せばよい。正でない実数 $s \le 0 (s \in \mathbb{R})$ に対して

$$\frac{c_k^0(r,s)}{(-1)^k \prod_{j=0}^{k-[k/2]-1}(r+j)} = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{\prod_{j=i}^{[k/2]-1}(r+j+1/2)}{(k-2i)!i!}(-s)^i > 0.$$

よって、$c_k^0(r,s) \neq 0$. □

Lemmas 3.14, 3.15 から Proposition 3.12、そして Proposition 2.1 は証明された。

§ 3.5 Difference of dessins of $\beta_l(m,n;s)$

本節では $\beta_l(m,n;s)$ 達が $\{m,m,n,n,\ldots,n\}$ 型の flower-tree を全て与える事を示す。

Proposition 3.16. *Let l, m and n be positive integers with $m \neq n$. For every flower-tree T of type $\{m,m,n,n,\ldots,n\}$ except for $(l/2)$-th one, there exists a solution s of $c_{l+1}(m/n, S) = 0$ such that the dessin of $\beta_l(m,n;s)$ coincides with T. The $(l/2)$-th flower-tree is obtained by a Belyi function $\beta_{l/2}(m,n;0)(X^2)$.*

次の lemma を準備する。

Lemma 3.17. *Let s_1 and s_2 be two solutions of $c_{l+1}(m/n, S) = 0$. If $s_1 \neq s_2$, then the dessins of $\beta_l(m,n;s_1)$ and $\beta_l(m,n;s_2)$ are distinct.*

Proof. s_1, s_2 を方程式 $c_{l+1}(m/n, S) = 0$ の 2 つの解とする。Proposition 3.4 から $\beta_{(j)} = \beta_l(m,n;s_j)(j = 1,2)$ は Belyi 関数であり、その dessin を D_j とおく。$D_1 = D_2$ であるとすると、$\beta_{(1)} = \beta_{(2)} \circ \varphi$ となる関数 $\varphi(X) = (aX+b)/(cX+d)(a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} D_1 \subset & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 & \supset D_2 \\ & {\scriptstyle\beta_{(1)}}\searrow & \circlearrowleft & \swarrow{\scriptstyle\beta_{(2)}} & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \\ & & \cup & & \\ & & 0 \bullet\!\!\longrightarrow\!\!\times 1 & & \end{array}$$

$\beta_{(j)}$ は多項式であるので、$\beta_{(j)}^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ であり $\varphi(\infty) = \infty$. 従って $c = 0$. また、1 の逆像 $\beta_{(j)}^{-1}(1)$ で分岐指数が 2 以上である点は 0 だけであるので $\varphi(0) = 0$. よって $b = 0$. 以上から $\varphi(X) = aX (a \in \mathbb{C}, a \neq 0)$ となる。0 の逆像 $\beta_{(j)}^{-1}(0)$ で分岐指数が m である点は、$s_jX^2 + X + 1 = 0$ の解 $\alpha_j^{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1-4s_j})/2s_j$ である。従って、$\varphi(\alpha_1^+) = \alpha_2^+$ または $\varphi(\alpha_1^+) = \alpha_2^-$. $\varphi(\alpha_1^+) = \alpha_2^+$ とすると $\varphi(\alpha_1^-) = \alpha_2^-$ であ

り、$\alpha_2^+ = a\alpha_1^+, \alpha_2^- = a\alpha_1^-$. この2式の両辺を足す、または掛けると $-1/s_2 = -a/s_1$, $1/s_2 = a^2/s_1$ を得る. よって $a^2 - a = 0$ であり、$a \neq 0$ から $a = 1$. 従って $s_1 = s_2$ となる。一方、$\varphi(\alpha_1^+) = \alpha_2^-$ とすると同様な議論で $s_1 = s_2 = 1/4$ となるが、Lemma 3.15 に矛盾。よって、$D_1 = D_2$ ならば $s_1 = s_2$. □

Proposition 3.6 から $c_{l+1}(m/n, S) = 0$ の解は相異なり、その個数は $[(l+1)/2](= \deg c_{l+1}(m/n, S))$ である。Lemma 3.17 より $c_{l+1}(m/n, S) = 0$ の解から構成される Belyi 関数の dessin は全て相異なり、$[(l+1)/2]$ 個である。一方、$\{m, m, n, n, \ldots, n\}$ 型 (m は 2 個、n は l 個) の flower-tree は l が奇数のときは $(l+1)/2$ 個、l が偶数のときは $(l+2)/2$ 個 存在する。従って l が奇数ならば、$\{m, m, n, n, \ldots, n\}$ 型の flower-tree は $\beta_l(m, n; s)$ 達で全て与えられる。l が偶数のときは、$\beta_l(m, n; s)$ 達で得られない dessin が 1 つだけあり、それは第 $(l/2)$ 番目の flower-tree である。実際、この第 $(l/2)$ 番目の flower-tree は (中心の点に関して) 点対称なものであり、またそれ以外の flower-tree は点対称ではない。$\beta_l(m, n; s)$ について、1 の逆像 A_1 で分岐指数が 2 以上である点は $0 \in A_1$ だけであり、0 の逆像 A_0 で分岐指数が m である点は $(-1 \pm \sqrt{1-4s})/2s \in A_0$ である。$\beta_l(m, n; s)$ の dessin が点対称であると仮定すると 0 が固定点となり、$(-1+\sqrt{1-4s})/2s = -(-1-\sqrt{1-4s})/2s$ となる。しかしこの式を満たす $s \in \mathbb{C}$ は存在しない。従って、$\beta_l(m, n; s)$ の dessin は点対称ではない。一方、第 $(l/2)$ 番目の flower-tree が点対称であることは、その Belyi 関数が $\{m, n, n, \ldots, n\}$ 型 flower-tree (m は 1 個、n は $(l/2)$ 個) を与える Belyi 関数から簡単に得られるという事から分かる。

Lemma 3.18. *Let l, m and n be positive integers with $m \neq n$. Assume l is even. Then $\beta_{l/2}(m, n; 0)(X)$ is a Belyi function whose dessin is the flower-tree of type $\{m, n, \ldots, n\}$. Here n is $(l/2)$ times in $\{m, n, \ldots, n\}$. Moreover, $\beta_{l/2}(m, n; 0)(X^2)$ is a Belyi function whose dessin is the $(l/2)$-th flower-tree of type $\{m, m, n, \ldots, n\}$. Here m is twice and n is l times in $\{m, m, n, \ldots, n\}$.*

Proof. $\beta_{l/2}(m, n; 0)(X^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が Belyi 関数である事は § 3.2 での議論と同様にして証明される。分岐指数などをみることにより、$\beta_{l/2}(m, n; 0)(X)$ の dessin は $\{m, n, \ldots, n\}$ 型の flower-tree である事が分かる。また、$\{m, n, \ldots, n\}$ 型 flower-tree は唯一つ存在するので一致する。$\beta_{l/2}(m, n; 0)(X)$ が $\{m, n, \ldots, n\}$ 型 flower-tree の Belyi 関数である事から、$\beta_{l/2}(m, n; 0)(X^2)$ は $\{m, m, n, \ldots, n\}$ 型 flower-tree を与える。また $\beta_{l/2}(m, n; 0)(X^2) = \beta_{l/2}(m, n; 0)((-X)^2)$ より、dessin は 点 0 で点対称であり $(l/2)$ 番目の flower-tree となる。 □

以上で Proposition 3.16 は示された。

§ 3.6 One-to-one correspondence between dessins and Belyi functions

前節では $\beta_l(m, n; s)$ 達が $\{m, m, n, n, \ldots, n\}$ 型の flower-tree を全て与える事を示した。本節では それぞれの $\beta_l(m, n; s)$ が どの flower-tree を与えるかについて研究する。その為に、関数 $\beta_l(m, n; s)$ を自然に含む (ある意味で完備化した) 関数 $\widehat{\beta_l}(r; s)$ を定義して Theorem C を証明する。

以下 $l \in \mathbb{Z}(l \geq 1)$ は正の整数とし固定する。幾つかの記号を用意する。正の実数 $r \in \mathbb{R}(r > 0)$ と 0 以上の整数 $k \in \mathbb{Z}(k \geq 0)$ に対して一般 2 項係数 ${}_rC_k$ を

$$ {}_rC_k = \frac{r(r-1)\cdots(r-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdots k} $$

(${}_rC_0 = 1$) とする。正の実数 $r \in \mathbb{R}(r > 0)$ と 0 でない複素数 $\alpha \in \mathbb{C}(\alpha \neq 0)$ に対して

ベキ級数 $P(r,\alpha)(X) \in \mathbb{Q}(r,\alpha)[[X]]$ を

$$P(r,\alpha)(X) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_rC_k \alpha^k X^k$$

と定義する。このとき

Lemma 3.19. *We have $P(r,\alpha)(X) = (1+\alpha X)^r$ in $\mathbb{Q}(r,\alpha)[[X]]$. For every point x in the disk $\mathcal{B}_\alpha = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1/|\alpha|\}$ the series $P(r,\alpha)(x)$ converges absolutely. In particular, $P(r,\alpha)(x) \neq 0$ for $x \in \mathcal{B}_\alpha$ with $x \neq -1/\alpha$.*

Proof. 最初の等式は定義から明らか。ベキ級数 $P(r,\alpha)(X)$ の収束半径は $1/|\alpha|$ であるので、開円板 $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1/|\alpha|\}$ の各点 x で $P(r,\alpha)(x)$ は絶対収束する。また、級数 $\sum_{k=0}^{\infty} |{}_rC_k|$ が収束する事から円周 $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1/|\alpha|\}$ 上の各点 x でも $P(r,\alpha)(x)$ は絶対収束する。特に、$\mathcal{B}_\alpha$ の全ての点 x に対して $|P(r,\alpha)(x)| = |1+\alpha x|^r$ である。従って $x \in \mathcal{B}_\alpha$, $x \neq -1/\alpha$ ならば $P(r,\alpha)(x) \neq 0$. □

単位円板 $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1\}$ を $\mathcal{U}$ とする。正の実数 $s \in \mathbb{R}(s>0)$ に対して写像 $\chi_s : \mathbb{C} \to \mathcal{U}$ を

$$\chi_s(x) = \begin{cases} sx/(sx+1) & \text{if } \mathrm{Re}(x) \geq -1/2s, \\ (sx+1)/sx & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とし、$\alpha_1(s) = (1-2s+\sqrt{1-4s})/2s, \alpha_2(s) = (1-2s-\sqrt{1-4s})/2s$ とする。正の実数 $r, s \in \mathbb{R}(r,s>0)$ に対して

$$\widehat{\beta}_l(r;s)(X) = \Big(\frac{P(r,\alpha_1(s))P(r,\alpha_2(s))}{P(r,-1)^2} \circ \chi_s(X)\Big)\Big(\sum_{k=0}^{l} c_k(r,s)X^k\Big)$$

と定義する。ここで $f \circ g(X) = f(g(X))$ とする。このとき

Proposition 3.20. *For positive real numbers $r, s \in \mathbb{R}(r,s>0)$ with $s > 1/4$, the map*

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\beta}_l(r;s): & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \\ & x(\in \mathbb{C}) & \mapsto & \widehat{\beta}_l(r;s)(x) \\ & \infty & \mapsto & \infty \end{array}$$

is well-defined and continuous. Moreover, we have

$$\widehat{\beta}_l(m/n;s)(X)^n = \beta_l(m,n;s)(X)$$

for positive integers $m, n \in \mathbb{Z}\,(m,n \geq 1)$.

Proof. 条件 $s > 1/4$ より $|\alpha_1(s)| = |\alpha_2(s)| = |-1| = 1$. Lemma 3.19 から $\mathbb{C}$ の全ての点 $x(\in \mathbb{C})$ に対して $P(r,\alpha_1(s))(\chi_s(x))$, $P(r,\alpha_2(s))(\chi_s(x))$, $P(r,-1)(\chi_s(x))$ は定義されている。また $1 \notin \chi_s(\mathbb{C})$ より $0 \notin P(r,-1)(\chi_s(\mathbb{C}))$ であるので写像 $\widehat{\beta}_l(r;s)$ は well-defined. ベキ級数は連続関数なので、$\widehat{\beta}_l(r;s)$ は $\{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x) \neq -1/2s\}$ の各点で連続である。$\lim_{x\in\mathbb{C}, x\to\infty} \widehat{\beta}_l(r;s)(x) = \infty$ より ∞ では連続。$\{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x) = -1/2s\}$ 上の点 x_1 に関しては、以下の等式から 2 つの極限値 $\lim_{x\to x_1-0} \widehat{\beta}_l(r;s)(x)$, $\lim_{x\to x_1+0} \widehat{\beta}_l(r;s)(x)$ が等しい事が分かる。よって $\widehat{\beta}_l(r;s)$ は連続写像。Lemma 3.19

$$\frac{P(r,\alpha_1(s))P(r,\alpha_2(s))}{P(r,-1)^2}\circ\chi_s(X)=\left.\frac{P(r,\alpha_1(s))(Y)P(r,\alpha_2(s))(Y)}{P(r,-1)(Y)^2}\right|_{Y=\chi_s(X)}$$
$$=\left(\left.\frac{(1+\alpha_1(s)Y)(1+\alpha_2(s)Y)}{(1-Y)^2}\right|_{Y=\chi_s(X)}\right)^r$$
$$=(sX^2+X+1)^r.$$

上式の2行目から3行目は、$\chi_s(X)$ を $sX/(sX+1)$ と $(sX+1)/sX$ のどちらにしても成立する事に注意する。従って $\widehat{\beta}_l(m/n;s)(X)^n=\beta_l(m,n;s)(X)$. □

ここで Lemma 3.13 で $k=l+1$ とした時の解析関数 $s_j(r)$ を1つとり固定し $s(r)$ と書く。Lemma 3.15 から $r>0$ ならば $s(r)>1/4$ である。正の実数 $r\in\mathbb{R}(r>0)$ に対して、写像 $\widehat{\beta}_l(r;s(r))$ による単位円板 $\mathcal{U}$ の逆像 $\widehat{\beta}_l(r;s(r))^{-1}(\mathcal{U})$ を $\mathcal{W}(r)$ と書く。Proposition 3.20 から 正の整数 $m,n\in\mathbb{Z}(m,n\geq 1)$ に対して、$\beta_l(m,n;s(m/n))$ による単位円板 $\mathcal{U}$ の逆像は $\mathcal{W}(m/n)$ と一致する。このとき Belyi 関数 $\beta_l(m,n;s(m/n))$ の flower-tree $T(m,n)$ は $\mathcal{W}(m/n)$ に含まれる、つまり $T(m,n)\subset\mathcal{W}(m/n)$. ここで $\mathcal{W}(m/n)$ は以下の2条件を満たす $(l+2)$ 個の閉集合 $\mathcal{W}_i(m/n)$ $(1\leq i\leq l+2)$ の和集合として (順序を除いて) 一意に表わされる:

$$\begin{array}{ll}\mathcal{W}_i(m/n)\approx\mathcal{U}\ \text{(homeomorphic)} & \text{for } 1\leq i\leq l+2,\\ \mathcal{W}_{i_1}(m/n)\cap\mathcal{W}_{i_2}(m/n)=\{0\} & \text{for } 1\leq i_1\lneq i_2\leq l+2.\end{array}$$

また $\mathcal{W}_i(m/n)$ は $(l+2)$ 次方程式 $(s(m/n)X^2+X+1)(\sum_{k=0}^{l}c_k(m/n,s(m/n))X^k)=0$ の解を1つずつ含む。ここで $s(m/n)X^2+X+1=0$ の解を含むものを $\mathcal{W}_1(m/n)$, $\mathcal{W}_2(m/n)$ とする。今、$T(m,n)$ が j 番目の $\{m,m,n,\ldots,n\}$ 型 flower-tree であるとする。このとき、$\mathcal{W}_1(m/n)$ と $\mathcal{W}_2(m/n)$ の間に j 個の閉集合 $\mathcal{W}_i(m/n)$ が中心点0から出ている (反対側には $(l-j)$ 個出ている)。また、$\mathcal{W}_{i_1}\cap\mathcal{W}_{i_2}=\{0\}(i_1\neq i_2)$ 及び $T(m,n)\subset\mathcal{W}(m/n)=\bigcup_{i=1}^{l+2}\mathcal{W}_i$ という事から逆も成り立つ、つまり $s(m/n)X^2+X+1=0$ の解を含む閉集合 $\mathcal{W}_1(m/n)$, $\mathcal{W}_2(m/n)$ の間に j 個の閉集合 $\mathcal{W}_i(m/n)$ があるならば、$T(m,n)$ は j 番目の $\{m,m,n,\ldots,n\}$ 型 flower-tree である。

いま r が正の実数を連続的に動くと写像 $\widehat{\beta}_l(r;s(r))$ は連続的に変化し、$\mathcal{W}(r)$ も連続に変形する。また $s(r)X^2+X+1=0$ の解も連続に変化する。従って、ある正の整数 $m_1,n_1\in\mathbb{Z}(m_1,n_1\geq 1)$ に対して $T(m_1,n_1)$ が j 番目の flower-tree ならば、全ての整数 $m,n\in\mathbb{Z}(m,n\geq 1)$ に対して $T(m,n)$ は j 番目の flower-tree になる。$m=n=1$ のときには $\{m,m,n,\ldots,n\}$ 型 $(m\neq n)$ ではないので本来は j 番目という呼び方はできない。しかしながら、$s(1)X^2+X+1=0$ の解と中心点0を結ぶ辺の間に $\sum_{k=0}^{l}c_k(1,s(1))X^k=0$ の解と中心点0を結ぶ辺が j 本ある時、形式的に j 番目の flower-tree と呼ぶ事にする。このとき $T(1,1)$ が j 番目の flower-tree ならば、全ての整数 $m,n\in\mathbb{Z}(m,n\geq 1)$ に対して $T(m,n)$ は j 番目の flower-tree である。そして Lemma 3.13 の後で定義したように $\{s_j(r)\}_{j=1}^{[(l+1)/2]}$ の添数をつけたとき $s(r)=s_{j_1}(r)$ ならば $T(1,1)$ は (j_1-1) 番目の flower-tree となる。さらに Lemma 3.14 から全ての正の実数 $r\in\mathbb{R}(r>0)$ に対して $s_1(r)<s_2(r)<\cdots<s_{[(l+1)/2]}(r)$. 従って添数の付け方に注意する事により Theorem C が示される。

Remark. Theorem C は講演時では予想の段階であった。研究集会後、Strebel 微分 (cf. [St],[Za1]) を用いる方法を中村博昭先生に助言して頂いた。実際 Strebel 微分を

使っても Theorem C を証明できるが、本稿では より具体的な記述によって証明を与えた。

4. Remarks on main results

§ 4.1 Discriminant conjecture

本節では flower-tree に関する Shabat–Zvonkin 予想について述べる。

Conjecture 4.1 (Shabat–Zvonkin [ShZv]) . *Let $m_1, m_2, \ldots, m_t$ be distinct t positive integers. Let T be a flower-tree of type $\{m_1, \ldots, m_1, m_2 \ldots, m_t\}$, where the numbers of m_i are equal to k_i, respectively. Then the "discriminant" of T splits into linear factors of the form*

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_t m_t$$

where a_i are integers with $0 \le a_i \le k_i$. Besides, the "discriminant" has a numeric factor whose prime divisors are less than $k_1 + k_2 + \cdots + k_t$.

本稿の主役である $\{m, m, n, \ldots, n\}$ 型 flower-tree の "discriminant" は、§ 3.3 で定義した $d_k(r)$ を使うと $d_{l+1}(m/n)$ である ("discriminant" の正確な定義については [ShZv] 参照)。Proposition 3.6 から、$d_{l+1}(m/n)$ は 以下の線形因子に分解される:

$$\begin{array}{ll} m + (l-j)n & (j \in \mathbb{Z}, 1 \le j \le [(l+1)/2] - 1), \\ 2m + (2j+1)n & (j \in \mathbb{Z}, 1 \le j \le [(l+1)/2] - 1), \\ n. & \end{array}$$

また 数値部分の因子 (numeric factor) は $C_{l+1} = d_{l+1}(1)/\mathfrak{D}_{l+1}(1)$ の因子である。$d_{l+1}(1)$ の因子は $\max\{2, l+2\} = l+2$ 以下であり、$\mathfrak{D}_{l+1}(1)$ の因子は $\max\{l, 2 + 2([(l+1)/2] - 1) + 1\} (\le l+2)$ 以下である。従って $l+2$ が素数でなければ、C_{l+1} の素因子は $l+2$ 未満である。$l+2$ が素数のとき $l+1$ は偶数であるので、Proposition 3.11 から $d_{l+1}(1) = (l+2)^{(l+1)/2-1}$. 一方、定義から

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{l+1}(1) = & \prod_{j=1}^{(l+1)/2-1} (l+1-j)^j \prod_{j=1}^{(l+1)/2-1} ((2j+3)/2)^j \\ & = l^1 (l-1)^2 \cdots ((l+1)/2)^{(l+1)/2-2} ((l+3)/2)^{(l+1)/2-1} \\ & \quad \times (5/2)(7/2)^2 \cdots ((l+2)/2)^{(l+1)/2-1} \end{aligned}$$

であり、$\mathfrak{D}_{l+1}(1)$ の持つ素数 $(l+2)$ ベキは $(l+2)^{(l+1)/2-1}$. よって $d_{l+1}(1)$ の因子と丁度打ち消し合い、C_{l+1} の素因子は $l+2$ 未満となる。つまり

Proposition 4.2. *Conjecture 4.1 is true for the case of type $\{m, m, n, \ldots, n\}$.*

なお、[ShZv] では $\{m, m, n, \ldots, n\}$ 型で m, n の個数がそれぞれ $2, 17$ の場合に "discriminant" を計算機で計算した結果がある。$d_{18}(m/n)$ とその "discriminant" とでは若干の違いがあるが、それは方程式 $c_{18}(r, S)$ とそれに対応するもの ([ShZv] で用いたもの) が若干違う為であり、本質的には $d_{l+1}(m/n)$ と "discriminant" は同じものである。

§ 4.2 Moduli field

本節では flower-tree の moduli field について考察する。一般の dessin D について、その moduli field を定義する。任意の dessin に対して、それを実現する $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された Belyi 関数 β_D が存在する事が知られている。有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群

$G_{\mathbb{Q}}$ の部分群 G_D を

$$G_D = \{\sigma \in G_{\mathbb{Q}} \mid D \text{ と } (\beta_D^\sigma)^{-1}([0,1]) \text{ は } \mathbb{P}^1 \text{ 上のグラフとして同値}\}$$

とし、D の moduli field M_D を $M_D = \overline{\mathbb{Q}}^{G_D}$ (G_D による $\overline{\mathbb{Q}}$ の不変体) と定義する。このとき次のような結果が知られている。

Proposition 4.3 (Shabat [Sh2](cf. [ShZv])). *For every tree T, there exists a Belyi function for T defined over M_T.*

今回の我々の構成は この要求を満たしている。

Proposition 4.4. *With notations as in the Theorem A, let T be the flower-tree of $\beta_l(m,n;s)$. Then $M_T = \mathbb{Q}(s)$.*

Proof. moduli field の定義から $M_T \subseteq \mathbb{Q}(s)$ である。ここで、G_T の元 σ を任意に1つとり固定する。$c_{l+1}(m/n,S) \in \mathbb{Q}[S]$ より、$\sigma(s)$ は $c_{l+1}(m/n,S)=0$ の解である。$\sigma(s) \neq s$ と仮定すると Lemma 3.17 から T と T^σ は同値ではなく、$\sigma \notin G_T$ となり矛盾。従って、$\sigma(s)=s$ となる。よって $M_T = \mathbb{Q}(s)$. □

§ 4.3 Simpler trees

本節では 今回扱った flower-tree よりも簡単なものについて考察する。直径1の tree を実現する Belyi 関数は X であり、直径2の tree の場合は $X^m (m \geq 2)$ である。$\{m,n,\dots,n\}$(m が1個、n が l 個) 型の flower-tree の Belyi 関数は $\beta_l(m,n;0)(X)$ である事が分かる。そして、直径3の tree は $\{m,1,\dots,1\}$ 型 (m が1個、1が $l-1$ 個) の flower-tree とみなせ、Belyi 関数は $\beta_{l-1}(m,1;0)(X)$ となる。従って、これらの場合は全て $\mathbb{Q}$ 上定義された Belyi 関数になり、$M_T=\mathbb{Q}$. よって、$\{m,m,n,\dots,n\}$ 型 flower-tree は $M_T \neq \mathbb{Q}$ となる non-trivial な 最も易しい tree である (cf. § 5.2, 5.3)。

§ 4.4 Remark on Proposition 2.1

本稿を編集中、Proposition 2.1 はより簡単に証明できる事が分かった。証明の方針は、Lemma 3.2 の漸化式を利用し 数学的帰納法を用いる。従って § 3.3, 3.4 のような大げさな議論は、Proposition 2.1 の為に本質的には必要ではない。しかしながら、§ 3.3, 3.4 で得られた結果は 様々な意味で重要である。例えば、Shabat–Zvonkin 予想 (判別式予想) の部分的解決に貢献している。また、Shabat–Zvonkin 予想を仮定すると次が言える。

Proposition 4.5. *Assume that Conjecture 4.1 is true for a flower-tree T. Then the extension $M_T/\mathbb{Q}$ is unramified at any prime divisor greater than $|T|$, where $|T|$ is the number of edges of T.*

この proposition は、Conjecture 1.3 を構成的に (肯定的に) 証明する時の良い道具になるはずである。

5. Some examples

本章では $l=1,3,5$ の場合について主結果の Belyi 関数を具体的に構成し、考察する。

§ 5.1 $l=1$ case

$c_2(r,S) = r(r+1)/2 - rS = -r(S-(r+1)/2)$ であるので、$c_2(m/n,S)=0$ の解は $(m+n)/2n$. このとき Belyi 関数 $\beta_1(m,n;(m+n)/2n)$ は

$$\beta_1(m,n;\frac{m+n}{2n}) = (\frac{m+n}{2n}X^2+X+1)^m(c_0(\frac{m}{n},\frac{m+n}{2n})+c_1(\frac{m}{n},\frac{m+n}{2n})X)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\frac{m+n}{2n}X^2 + X + 1\Big)^m \Big(1 - \frac{m}{n}X\Big)^n \\
&= 1 - \frac{m(m+n)(2m+n)}{6n^2}X^3 - \frac{m(m+n)(2m+n)(m-n)}{8n^3}X^4 \\
&\quad - \frac{m(m+n)(2m+n)(m-n)(2m-n)}{20n^4}X^5 \\
&\quad + (\text{higher terms of degree greater than 5}).
\end{aligned}
$$

$m=3, n=4$ のときの Belyi 関数 $\beta_1(3,4;7/8)$ は

$$
\begin{aligned}
\beta_1(3,4;7/8) = {}& \frac{27783}{131072}X^{10} - \frac{6615}{16384}X^9 - \frac{945}{16384}X^8 - \frac{75}{128}X^7 + \frac{3325}{2048}X^6 \\
&+ \frac{21}{256}X^5 + \frac{105}{256}X^4 - \frac{35}{16}X^3 + 1.
\end{aligned}
$$

Belyi 関数 $\beta_1(3,4;7/8)$ の dessin は下図のようになる。

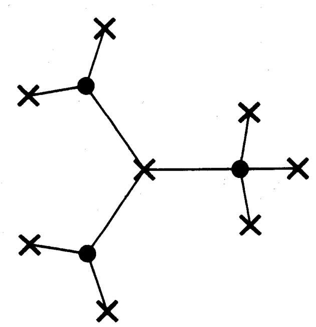

Figure 5.1

§ 5.2 $l=3$ case

$$
c_4(r,S) = \frac{r(r+1)}{2}\Big(S^2 - (r+2)S + \frac{(r+2)(r+3)}{12}\Big)
$$

であるので、$c_4(m/n, S) = 0$ の解は

$$
s_{\pm} = \frac{3(m+2n) \pm \sqrt{3(m+2n)(2m+3n)}}{6n}.
$$

このとき Belyi 関数 $\beta_3(m,n;s_{\pm})$ は

$$
\begin{aligned}
\beta_3(m,n;s_{\pm}) &= \big(s_{\pm}X^2 + X + 1\big)^m \Big(\sum_{k=0}^{3} c_k\Big(\frac{m}{n}, s_{\pm}\Big)X^k\Big)^n \\
&= 1 + \Big(\frac{m(m+n)(m+2n)(2m+3n)(4m+7n)}{60n^4} \\
&\qquad \pm \frac{m(m+n)(m+2n)(2m+3n)\sqrt{3(m+2n)(2m+3n)}}{36n^4}\Big)X^5 \\
&\quad + (\text{higher terms of degree greater than 5}).
\end{aligned}
$$

$m=6, n=5$ のとき $s_-=2/5, s_+=14/5$ であり、それぞれの Belyi 関数は

$$\begin{aligned}\beta_3(6,5;s_-) = &-\tfrac{10554638336}{476837158203125}X^{27} - \tfrac{6476709888}{95367431640625}X^{26} - \tfrac{7948689408}{95367431640625}X^{25}\\ &+\tfrac{42375168}{3814697265625}X^{24} - \tfrac{189395712}{3814697265625}X^{23} + \tfrac{333170496}{762939453125}X^{22} + \tfrac{1355726592}{762939453125}X^{21}\\ &+\tfrac{418456368}{152587890625}X^{20} - \tfrac{40672368}{152587890625}X^{19} + \tfrac{25308492}{30517578125}X^{18} - \tfrac{439828488}{152587890625}X^{17}\\ &-\tfrac{532950759}{30517578125}X^{16} - \tfrac{1093413024}{30517578125}X^{15} + \tfrac{2431836}{1220703125}X^{14} - \tfrac{1090584}{244140625}X^{13} + \tfrac{311256}{48828125}X^{12}\\ &+\tfrac{747792}{9765625}X^{11} + \tfrac{2277396}{9765625}X^{10} - \tfrac{1848}{390625}X^{9} + \tfrac{594}{78125}X^{8} - \tfrac{396}{3125}X^{6} - \tfrac{2376}{3125}X^{5} + 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3(6,5;s_+) = &\tfrac{17630969875424112148 48}{476837158203125}X^{27} + \tfrac{1545572034533931909 12}{95367431640625}X^{26}\\ &+\tfrac{19853929534521058099 2}{95367431640625}X^{25} - \tfrac{391722893443639296}{3814697265625}X^{24} - \tfrac{499865485474688256}{3814697265625}X^{23}\\ &+\tfrac{60329023703047814 4}{762939453125}X^{22} + \tfrac{271566393255641088}{762939453125}X^{21} + \tfrac{85939889011842096}{152587890625}X^{20}\\ &-\tfrac{2375662344135696}{152587890625}X^{19} - \tfrac{664637272536468}{30517578125}X^{18} + \tfrac{9713161164849912}{152587890625}X^{17}\\ &+\tfrac{897045969994713}{30517578125}X^{16} + \tfrac{1860215453002368}{30517578125}X^{15} - \tfrac{953832057156}{1220703125}X^{14}\\ &-\tfrac{295991404632}{244140625}X^{13} + \tfrac{111732794712}{48828125}X^{12} + \tfrac{10583005104}{9765625}X^{11} + \tfrac{32321456244}{9765625}X^{10}\\ &-\tfrac{5057976}{390625}X^{9} - \tfrac{70686}{3125}X^{8} + \tfrac{484704}{15625}X^{7} + \tfrac{47124}{3125}X^{6} + \tfrac{282744}{3125}X^{5} + 1.\end{aligned}$$

Belyi 関数 $\beta_3(6,5;2/5), \beta_3(6,5;14/5)$ の dessin は下図のようになる。

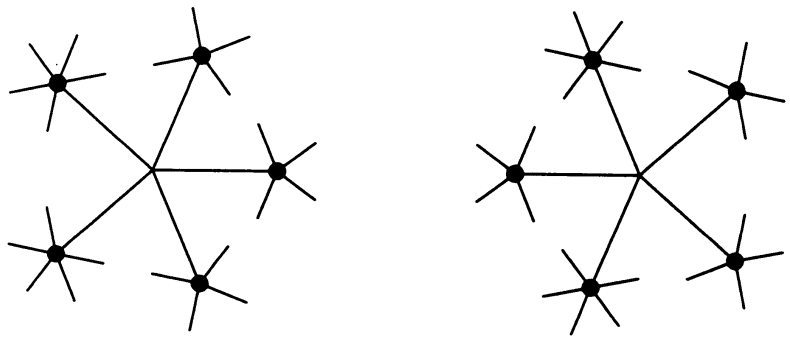

Figure 5.2

$\{m,m,n,n,n\}$ 型 flower-tree の moduli field について次が分かる。

Proposition 5.1. *For every real quadratic field F, there exist infinitely many flower-trees T of type $\{m,m,n,n,n\}$ such that $M_T = F$.*

Proof. 正の整数 $d \in \mathbb{Z}(d \geq 1)$ について、集合 $\{du^2 \mid u \in \mathbb{Q}\}$ は正の実数全体からなる集合の中で稠密である。特に $3/2 < du_1^2 < 2$ となる $u_1 \in \mathbb{Q}$ が無数に存在する。その $u_1 \in \mathbb{Q}$ に対して $m_1/n_1 = 3(2-du_1^2)/(2du_1^2-3)$ となるように正の整数 $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}(m_1, n_1 \geq 1)$ を定める。このとき $3(m_1+2n_1)(2m_1+3n_1) = d((2m_1+3n_1)u_1)^2$. 従って $\{m_1, m_1, n_1, n_1, n_1\}$ 型 flower-tree T の moduli field M_T は $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ である。 □

§ 5.3 $l=5$ case

$$f(r,S) = 120S^3 - 180(r+3)S^2 + 30(r+3)(r+4)S - (r+3)(r+4)(r+5)$$

とおくと $c_6(r,S) = -r(r+1)(r+2)f(q,S)/720$ である。曲線 $C, E \subset \mathbb{P}^2$ を

$$C: \ f(r,S)=0,$$
$$E: \ y^2=x^3-2475x-5850,$$

とすると 以下の双有理写像 φ,ψ が存在する:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & C & \to & E \\ & (r,S) & \mapsto & (x,y)=\left(15(\frac{16S}{r+3}-3),120(\frac{4-30S}{r+S}+3)\right), \\ \psi: & E & \to & C \\ & (x,y) & \mapsto & (r,S)=\left(3(\frac{160}{15x+y+315}-1),\frac{2(x+45)}{15x+y+315}\right). \end{array}$$

このとき $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_C$, $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_E$ である。従って ある有理数 $r\in\mathbb{Q}$ に対して、3次式 $f(r,S)\in\mathbb{Q}[S]$ が $\mathbb{Q}$ 上可約であることは、$\psi(P)=(r,s)(s\in\mathbb{Q})$ となる曲線 E 上の $\mathbb{Q}$-有理点 $P=(x,y)\in E(\mathbb{Q})$ が存在することと同値である。つまり、どんな (またはどの位の個数の) r に対して $f(r,S)=0$ が $\mathbb{Q}$ 上可約かという問題は、楕円曲線 E の $\mathbb{Q}$ 上の Mordell-Weil 群 $E(\mathbb{Q})$ の構造による。計算機ソフト Simath 等を利用すると、$E(\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である事が分かる。ここで注意すべき事は、今 我々が求めようとしているものが $C(\mathbb{Q})$ 全体なのではなく、その部分集合 $C_+=\{(r,S)\in C(\mathbb{Q})\mid r>0\}$ であるということである。特に、$E(\mathbb{Q})$ の全ての点から目標とする r (つまり、3次式 $f(r,S)$ が $\mathbb{Q}$ 上可約となるような $r\in\mathbb{Q},r>0$) が得られるとは限らない。例えば、$P_0=(75,-480)\in E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ に対して $\psi(P_0)=(-5/2,1/4)\notin C_+$. 以上のような事に注意しながら、次の事が分かる。

Proposition 5.2. *The function* $\beta_5(33,124;69/248)(X)$ *has the minimal degree among Belyi functions whose dessins are flower-trees of type* $\{m,m,n,n,n,n,n\}$ $(m\neq n)$ *and which are defined over* $\mathbb{Q}$.

Proof. $P_1=(-221/9,5408/27)\in E(\mathbb{Q})$ とすると $\psi(P_1)=(33/124,69/248)$ である。$\beta_5(33,124;69/248)(X)$ の次数は、$33\times2+124\times5=686$. 次数が 686 以下となる $\{m,m,n,n,n,n,n\}$ 型 flower-tree は高々有限個であるので、それらを全て調べれば十分である。実際、$0<m\leq(686-5)/2$ かつ $0<n\leq(686-2)/5$ となる互いに素な整数 m,n に対して、$f(m/n,S)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約である事をみればよい。 □

それでは、2番目に小さい次数を持つものは何かという疑問が出る。答えは、$m=2008145$,$n=1653242$ のとき、$\beta_5(2008145,1653242;2227251/3306484)(X)$ という Belyi 関数で、その次数は 12282500 である。この場合について、同様に調べるのは大変困難である。実は、楕円曲線 E における高さ関数 (naive (Weil) height と canonical height) を使うことによって、証明は簡単になる。方針は大体以下のようである。まず、次数が小さい $\mathbb{Q}$ 上定義された Belyi 関数 $\beta_l(m,n;s)$ が存在するならば、有理数 $r=m/n\in\mathbb{Q}$ の "高さ" は小さくなり、また $f(r,S)=0$ の有理数解 $s\in\mathbb{Q}$ の "高さ" も小さい。このとき、φ によって $P=\varphi((r,S))$ の "高さ"(naive height) も小さい事が分かる。ここで、E 上の点の naive height と canonical height の差の絶対値は (各々の点に依らない E のみに依るある定数で) 有界である (cf. [Si2]) ことに注意すると、$P=\varphi((r,S))$ の canonical height $\hat{h}(P)$ も小さい。$E(\mathbb{Q})$ の点で、canonical height がある値より小さいものは高々有限個であり (この個数はそれ程多くなく) 容易に把握できる。そして、それらの点に対して ψ の像が集合 C_+ に入っていたら Belyi 関数の次数 $2m+5n$ を求め、次数を比較する。

また、同様な手法で次のようなことが分かる。

Proposition 5.3. *For every positive rational number $r \in \mathbb{Q}(r > 0)$, the equation $f(r, S) = 0$ has at most one rational solution.*

次の lemma(証明略) を用意する。$P_0 = (75, -480)$ とおくと $P_0 \in E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ であり、その位数は 3 である。このとき

Lemma 5.4. *If $\psi(P) \in C_+$ for a point $P \in E(\mathbb{Q})$, then $\psi((-1)^{j_1}P + j_2P_0) \notin C_+$ for each $(j_1, j_2) \in \{(0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$.* □

Sketch of proof of Proposition 5.3. 正の有理数 $r \in \mathbb{Q}(r > 0)$ に対して、有理数 $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$ を方程式 $f(r, S) = 0$ の解とする。$E(\mathbb{Q})$ の点 $P_i(i = 1, 2)$ を $P_i = \varphi((r, s_i))$ とおく。このとき、P_1 と P_2 の canonical height の差の絶対値 $|\hat{h}(P_1) - \hat{h}(P_2)|$ は大きくない。Mordell-Weil 群 $E(\mathbb{Q})$ の自由階数 $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}E(\mathbb{Q})$ が 1 である事と $\hat{h} \circ [n] = n^2\hat{h}$ から、r が十分大ならば、$\hat{h}(P_1) = \hat{h}(P_2)$ である。このとき canonical height の性質と $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}E(\mathbb{Q}) = 1$ を再び使うと、$P_1 + P_2$ または $P_1 - P_2$ が torsion point になる事が分かる。Lemma 5.4 より、$P_1 = P_2$ となり $s_1 = s_2$. r が十分には大きくない時については、E 上の点で canonical height がある値より小さい有限個ものについて、それらの ψ での像が 相異なる $r > 0$ へ行くことを確かめれば良い。 □

Proposition 5.3 の系として

Corollary 5.5. *For positive integers m and n with $m \neq n$, the set of three flower-trees of type $\{m, m, n, n, n, n, n\}$ does not split completely into three $G_{\mathbb{Q}}$-orbits.*

Corollary 5.6. *Let m and n be positive integers with $m \neq n$, and T a flower-tree of type $\{m, m, n, n, n, n, n\}$. Then the moduli field M_T of T is a cyclic cubic field if and only if $(m + 4n)(2m + 3n)$ is a perfect square in $\mathbb{Z}$.*

Corollary 5.6 の条件を満たす内で Belyi 関数の次数が最小なものは、$(m, n) = (37, 2)$ の時で その次数は 84 である。また、その時の moduli field は導手 (conductor) が $2709 = 3^2 \cdot 7 \cdot 43$ の 3 次巡回体である。

[ShZv] において、$(m + 4n)(2m + 3n)$ が完全平方 (例えば、$m = t^2 + 6t - 3, n = t^2 - 4t + 2(t \in \mathbb{Z}, t \geq 4)$ とする) であり、かつ $f(m/n, S)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であれば M_T は 3 次巡回体であると主張している。そして Hilbert の既約性定理を使って、$f((t^2 + 6t - 3)/(t^2 - 4t + 2), S)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約となる $t \in \mathbb{Z}$ は無限個あるとしている。しかしながら実は Proposition 5.3 によって、Hilbert の既約性定理を使う必要はない事が分かる。特に、$m = t^2 + 6t - 3, n = t^2 - 4t + 2$ と特殊化する必要もない。

6. Fundamental lemmas

§ 6.1 Relation between coefficients and discriminant

本節では Lemma 3.7(Lemma 3.9) で用いた多項式の係数と判別式の関係について述べる。R を Dedekind 環とし、F をその商体とする。$f(X)$ を d 次の monic な F 係数多項式とする。多項式 $f(X)$ が体 F の代数的閉包 $\overline{F}$ の元 α_j 達によって $f(X) = \prod_{j=1}^{d}(X - \alpha_j)$ と因数分解されたとき、$f(X)$ の判別式 $\mathrm{disc}(f)$ を

$$\mathrm{disc}(f) = \prod_{1 \leq j_1 < j_2 \leq d} (\alpha_{j_1} - \alpha_{j_2})^2$$

と定義する。このとき

Lemma 6.1. *Let $f(X)$ be a monic polynomial of the form $f(X) = \sum_{i=0}^{d} g_iX^i$ with $g_i \in R$, and $\mathfrak{p}$ an integral ideal of R. If $g_i \in \mathfrak{p}$ for every i with $0 \leq i \leq i_0$, then $\mathfrak{p}^{i_0} \mid \mathrm{disc}(f)$.*

Proof. monic な多項式 $f(X)=\sum_{i=0}^{d} g_i X^i$ の判別式 $\mathrm{disc}(f)$ は、以下で定義される行列 M を用いると $\mathrm{disc}(f)=(-1)^{d(d-1)/2}\det(M)$ と表される (cf. [Co] § 3.3)。ここで $\det(M)$ は M の行列式とする。M は $(2d-1)\times(2d-1)$ 行列で

$$M=\begin{pmatrix}
g_d & g_{d-1} & & \cdots & & g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & g_d & g_{d-1} & & \cdots & & g_1 & g_0 & 0 \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots \quad \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & g_d & g_{d-1} & & \cdots & & g_1 \quad g_0 & 0\\
0 & & \cdots & 0 & g_d & g_{d-1} & & \cdots & g_1 & g_0\\
h_d & h_{d-1} & \cdots & & h_2 & h_1 & 0 & & \cdots & 0\\
0 & h_d & h_{d-1} & \cdots & & h_2 & h_1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & h_d & h_{d-1} & & \cdots & h_2 & h_1 \quad 0 & 0\\
0 & & \cdots & 0 & h_d & h_{d-1} & \cdots & & h_2 \quad h_1 & 0\\
0 & & \cdots & & 0 & h_d & h_{d-1} & \cdots & h_2 & h_1
\end{pmatrix},$$

$h_i=ig_i(i=1,2,\dots,d)$ と定義される。このとき、行列式の定義から

$$\prod_{i=1}^{d-1}\langle g_{i-1},g_{i-2},\dots,g_0,h_i,h_{i-1},\dots,h_1\rangle \mid \det(M). \tag{6.1}$$

なお、$\langle r_1,r_2,\dots,r_s\rangle$ は $r_i\in R(1\le i\le s)$ で生成される R の ideal とする。また、式 (6.1) の積 $\prod_{i=1}^{d-1}$ の第 i 項は 行列 M の $(2d-i)$ 列によるものである。今、h_i の定義から $\langle g_{i-1},g_{i-2},\dots,g_0,h_i,h_{i-1},\dots,h_1\rangle=\langle g_i,g_{i-1},\dots,g_0\rangle$ であり

$$\prod_{i=1}^{d-1}\langle g_i,g_{i-1},\dots,g_0\rangle \mid \det(M).$$

ここで、ある ideal $\mathfrak{p}$ が $g_i(0\le i\le i_0)$ を全て含むならば

$$\mathfrak{p}\mid\langle g_{i_0},g_{i_0-1},\dots,g_0\rangle\mid\cdots\mid\langle g_2,g_1,g_0\rangle\mid\langle g_1,g_0\rangle.$$

従って、$\mathfrak{p}^{i_0}\mid\det(M)\mid\mathrm{disc}(f)$. □

§ 6.2 Chebyshev function of second kind

本節では、Lemma 3.11 で用いた第 2 種 Chebyshev 関数の母関数について述べる。第 1 種 Chebyshev 関数とはいわゆる Chebyshev 多項式 $\cos(k\arccos x)$ の事であり一方、第 2 種 Chebyshev 関数とは大体 $\sin(k\arccos x)$ に似た物のことである。$U_k(x)$ の定義 (cf. [BoEr] § 2.1) は

$$U_k(x)=\frac{1}{k+1}\frac{\partial\cos((k+1)\arccos x)}{\partial x}=\frac{\sin((k+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

$x=\cos\theta$ とおくと、$U_k(x)=\sin((k+1)\theta)/\sin\theta$. 等式 $\exp(\sqrt{-1}\theta)=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta=x+\sqrt{x^2-1}$, $\exp(-\sqrt{-1}\theta)=x-\sqrt{x^2-1}$, $\exp((k+1)\sqrt{-1}\theta)=(x+\sqrt{x^2-1})^{k+1}$ などに注意すると

$$U_k(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{k+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{k+1}}{(x+\sqrt{x^2-1})-(x-\sqrt{x^2-1})}.$$

このとき $U_k(x)$ 達は次の母関数によって与えられる。

Lemma 6.2. *We have*

$$\frac{1}{y^2-2xy+1} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) y^k.$$

Proof. $x_1 = x + \sqrt{x^2-1}, x_2 = x - \sqrt{x^2-1} \in \overline{\mathbb{Q}(x)}$ とする。$x_1x_2 = 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2-2xy+1} &= \frac{1}{(y-x_1)(y-x_2)} \\ &= \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{y-x_1} - \frac{1}{y-x_2}\right) \\ &= \frac{-1}{x_1-x_2}\sum_{k=0}^{\infty}(x_1^{-k-1} - x_2^{-k-1})y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_1^{k+1}-x_2^{k+1}}{x_1-x_2}y^k.\end{aligned}$$

□

$U_k(x) = (x_1^{k+1} - x_2^{k+1})/(x_1 - x_2)$ は、x_1, x_2 の置換で不変であるので $U_k(x) \in \mathbb{Q}(x)$. また x_1, x_2 が $\mathbb{Q}[x]$ 上整であるので $U_k(x) = x_1^k + x_1^{k-1}x_2 + \cdots + x_2^k$ も $\mathbb{Q}[x]$ 上整であり、$U_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$. ここで 多項式 $x_1^j + x_2^j \in \mathbb{Q}[x] (j \geq 1)$ を考察する。定義から $x_1 + x_2 = 2x$, $x_1^{j+1} + x_2^{j+1} = (x_1+x_2)(x_1^j + x_2^j) - (x_1^{j-1} + x_2^{j-1})$ である。数学的帰納法により、$j \geq 1$ に対して $x_1^j + x_2^j = 2^j x^j +$ (lower terms of degree less than j) が分かる。従って

$$\begin{aligned}U_k(x) &= (x_1^k + x_2^k) + (x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) + \cdots \\ &= 2^k x^k + \text{(lower terms of degree less than } k). \end{aligned} \tag{6.2}$$

いま $x = \cos(\pi j/(k+1)) (j \in \mathbb{Z})$ とすると

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos(\pi j/(k+1)) + \sqrt{-1}\sin(\pi j/(k+1)) = \exp(\pi\sqrt{-1}j/(k+1)), \\ x_2 &= \exp(-\pi\sqrt{-1}j/(k+1))\end{aligned}$$

となるので $x_1^{k+1} = x_2^{k+1} = (-1)^j$. また $j = 1, 2, \ldots, k$ ならば $x_1 \neq x_2$ であるので、$\cos(\pi j/(k+1)) (j = 1, 2, \ldots, k)$ は $U_k(x)$ の相異なる k 個の解である。よって 式 (6.2) と合せると

$$U_k(x) = 2^k \prod_{j=1}^{k}\bigl(x - \cos(\pi j/(k+1))\bigr).$$

Lemma 3.11 に適用するには $y = sX$, $x = -1/2s$ とすると $1/(y^2 - 2xy + 1) = 1/(s^2X^2 + X + 1)$. このとき

$$\begin{aligned}c_k(1, s^2) &= U_k(-1/2s)s^k \\ &= \textstyle\prod_{j=1}^{k}\bigl(-1 - 2s\cos(\pi j/(k+1))\bigr)\end{aligned}$$

となる。従って、$1/4\cos^2(\pi j/(k+1)) (j = 1, 2, \ldots, [k/2])$ は $c_k(1, S) = 0$ の解である。また $1/4\cos^2(\pi j/(k+1)) (j = 1, 2, \ldots, [k/2])$ は相異なり、$\deg_S c_k(1, S) = [k/2]$ であるので Lemma 3.11 の $c_k(1, S)$ の因数分解を得る。

References

[AdSh] Adrianov, N. M., Shabat, G. B., *Plane trees and classical mathematics*, Algebra, 3. J. Math. Sci. **82** (1996), no. 6, 3747–3753.

[Bl] Bliss, G. A., Algebraic functions, Dover Publications, Inc., New York, 1966

[BoEr] Borwein, P., Erdélyi, T., Polynomials and polynomial inequalities, Graduate Texts in Math. **161**.

[Co] Cohen, H., A course in computational algebraic number theory, Graduate Texts in Math. **138**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Di] Diestel, R., Graph theory, Graduate Texts in Math. **173**, Springer-Verlag, New York, 1997.

[Gr] Grothendieck, A., *Esquisse d'un programme*, in [ScLo1], 5–48 (an English translation on pp. 243–283).

[JoSt] Jones, G. A., Streit, M., *Galois groups, monodromy groups and cartographic groups*, in [ScLo2], 25–65.

[Ko] Komatsu, T., *Geometric balance of cuspidal points realizing dessin d'enfants on the Riemann sphere*, Math. Ann. **320** (2001), no.3, 417–429.

[Mi] Miyashita, M., (Master thesis)(Japanese), Osaka Univ. (1999)

[Sc1] Schneps, L., *Dessins d'enfants on the Riemann sphere*, in [Sc2], 47–77.

[Sc2] Schneps, L. (ed.), The Grothendieck theory of dessins d'enfants, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **200**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[ScLo1] Schneps, L., Lochak, P. (ed.), Geometric Galois actions 1, Around Grothendieck's "Esquisse d'un programme", London Math. Soc. Lecture Note Ser. **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[ScLo2] Schneps, L., Lochak, P. (ed.), Geometric Galois actions 2, The inverse Galois problem, moduli spaces and mapping class groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **243**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Sh1] Shabat, G. B., *On the classification of plane trees by their Galois orbits*, in [Sc2], 169–177.

[Sh2] Shabat, G., *Notes of the seminar on the "dessins d'enfant"*, 1990, unpublished (in Russian).

[ShZv] Shabat, G. Zvonkin, A., *Plane trees and algebraic numbers*, Jerusalem combinatorics '93, 233–275, Contemp. Math. **178**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Si1] Silverman, J. H., The arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Math. **106**. Springer-Verlag, New York, 1986.

[Si2] Silverman, J. H., *The difference between the Weil height and the canonical height on elliptic curves*, Math. Comp. **55** (1990), no. 192, 723–743.

[St] Strebel, K., Quadratic differentials, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 5. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Za1] Zapponi, L., *Fleurs, arbres et cellules: un invariant galoisien pour une famille d'arbres*, Compositio Math. **122** (2000), no. 2, 113–133.

[Za2] Zapponi, L., *Galois action on diameter four trees*, preprint.

[Za3] Zapponi, L., *Wild trees*, preprint.

〒 192–0397 東京都八王子市南大沢 1–1
東京都立大学大学院理学研究科数学教室
小松 亨
E-mail: trkomatu@comp.metro-u.ac.jp